

Задача из Миасса

Будем строить набор максимально возможных глубин, то есть такой, что -1 в каждой ячейке заменяется на наибольшее число, не нарушающее при этом никаких условий задачи.

Заметим, что каждое известное (не равное -1) значение глубины d_{ij} в некоторой ячейке (i, j) порождает множество ограничений на максимальную глубину во всех других ячейках. А именно, ячейки, находящиеся от (i, j) на манхэттенском расстоянии, равном 1, не могут иметь глубину больше, чем $d_{ij} + v$. Ячейки, находящиеся на манхэттенском расстоянии 2, не могут иметь глубину больше, чем $d_{ij} + 2 \cdot v$, и так далее. Если глубина в некоторой ячейке нарушает хотя бы одно из ограничений, то она не может являться частью корректного ответа. То есть, значение в любой ячейке должно удовлетворять наиболее строгому (минимальному по величине) из ограничений в ней. Обозначим его $dmax_{ij}$.

Покажем, что значения $dmax_{ij}$ в любых соседних ячейках не могут отличаться больше, чем на v . Предположим обратное: нашлась какая-то пара значений d_1 и d_2 , такая что $d_1 > d_2 + v$. Поскольку d_2 — это просто минимум из ограничений в ячейке, то существует какое-то ограничение, на котором этот минимум достигается. Рассмотрим ограничения на соседние ячейки, порожденные тем же значением d_{ij} . Поскольку манхэттенское расстояние до соседних клеток отличается ровно на 1, то эти ограничения могут быть равны $d_2 + v$ или $d_2 - v$. В любом случае, имеем значения не больше $d_2 + v$. А значит, и минимум из всех ограничений в любой из соседних клеток не может превосходить этой величины. Получили противоречие с тем, что $d_1 > d_2 + v$. Значит, построенный таким образом набор глубин $dmax_{ij}$ удовлетворяет условию задачи: разность любых соседних значений не превосходит v .

Заметим, что рассуждение выше верно только в том случае, если все уже известные глубины удовлетворяют всем ограничениям, порожденным другими глубинами. Если же в некоторой ячейке $d_{ij} > dmax_{ij}$, то существуют какие-то две ячейки, находящиеся на манхэттенском расстоянии x и имеющие разность глубин больше, чем $v \cdot x$. В этом случае построить требуемое невозможно.

Покажем, как можно эффективно вычислять $dmax_{ij}$. Разобьем все ограничения, существующие в ячейке (i, j) , на следующие группы:

- ограничения, порожденные значениями в ячейках слева сверху от (i, j) , то есть такими, что их индексы (i', j') удовлетворяют условиям $i' \leq i, j' \leq j$;
- ограничения, порожденные значениями справа сверху от (i, j) ($i' \leq i, j' \geq j$);
- ограничения, порожденные значениями слева снизу от (i, j) ($i' \geq i, j' \leq j$);
- ограничения, порожденные значениями справа снизу от (i, j) ($i' \geq i, j' \geq j$).

Очевидно, что любое из ограничений попадает как минимум в одну из групп.

Соответственно, запустим несколько отдельных проходов по таблице: слева сверху, справа сверху, слева снизу и справа снизу. При каждом проходе будем вычислять $dmax_{ij}$ с учетом ограничений только выбранной группы. Значения пересчитываются на основе значений соседей, уже вычисленных ранее в том же проходе. Например, при проходе слева сверху:

$$dmax[i][j] = \min(dmax[i-1][j] + v, dmax[i][j-1] + v).$$

Если хотя бы в одном из проходов в любой из ячеек мы получим $d_{ij} > dmax_{ij}$, то ответ к задаче NO. В противном случае (противоречий не обнаружилось) — YES.