

Задача из Черёмушек

При известных a , b , c мы сразу можем определить, какие площади должны получиться при разбиении. Для этого нужно найти исходную площадь многоугольника и разделить её в нужном отношении на три части. Заметим, что из формулы Пика следует, что площадь любого многоугольника с целочисленными координатами вершин на клетчатой бумаге либо целая, либо полуцелая. Поэтому можно удвоить все площади и работать только с целыми числами.

Теперь нужно найти количество возможных разбиений. Мысленно упорядочим площади слева направо при разрезании и скажем, что они должны быть S_a , S_b , S_c . В такой постановке первая диагональ отсекает часть площадью S_a , а вторая — S_c , при этом площадь между диагоналями будет S_b .

Обозначим первую диагональ как (i, j) , а вторую как (k, l) . Будем считать вершины упорядоченными в порядке обхода по часовой стрелке. Тогда многоугольник с вершинами $[i, i + 1, \dots, j - 1, j]$ (при этом j может быть меньше i , если мы перешли через n -ю вершину) будет иметь площадь S_a . Очевидно, что второй многоугольник не взаимодействует с вершинами первого, за исключением, возможно, крайних точек i, j .

Таким образом, при фиксированной диагонали (i, j) нам нужно подсчитать количество пар (k, l) таких, что они отсекают площадь S_c и лежат на оставшейся части многоугольника (исключая только вершины между i и j не включительно). Получаем тривиальное решение за $\mathcal{O}(n^4)$, при условии что мы можем быстро найти площадь, отсекаемую диагональю. Это легко сделать с помощью формулы Гаусса (формулы шнурования) и префиксных сумм.

Теперь заметим, что для каждого фиксированного i существует не более одного j такого, что площадь, отсекаемая диагональю (i, j) , будет равна S_a . Это, например, следует из монотонного увеличения площади по мере удаления вершины j при использовании формулы Гаусса. Аналогичное утверждение верно и для пар (k, l) с площадью S_c : для каждого k существует не более одного подходящего l . Поскольку у нас всего три требуемых значения площади, их все можно предподсчитать для каждой вершины с помощью бинарного поиска или метода двух указателей. Получаем решение за $\mathcal{O}(n^2)$.

Чтобы улучшить эту оценку, можно заметить, что при переборе пар (i, j) (где j вычисляется по i и требуемой площади за $\mathcal{O}(1)$) интервал для (k, l) сдвигается, и всего таких сдвигов не более n . Следовательно, с этим интервалом можно работать как со скользящим окном. Также можно наложить определённые ограничения на все подходящие пары (k, l) и находить нужное количество для данной диагонали (i, j) с помощью декартова дерева или ordered set. В итоге можно добиться сложности $\mathcal{O}(n \log n)$ или даже $\mathcal{O}(n)$. Стоит также отметить, что нужно аккуратно учитывать повторы при переборе.