

Задача из Златоуста

Не умаляя общности, будем считать, что $n \leq m$.

Ответ на задачу — «Yes» тогда и только тогда, когда в некоторой строке матрицы $a_{i,j}$ существует возрастающая последовательность длины хотя бы $m - n + 1$. Докажем это. Если в строке i существует такая последовательность с индексами $j_1, j_2, \dots, j_{m-n+1}$ (то есть, $a_{i,j_1}, a_{i,j_2}, \dots$ образуют возрастающую последовательность), то мы можем удалить все строки, кроме i -й, и все столбцы, кроме j_k -х, и оставшаяся матрица будет удовлетворять условию. Если же последовательности не существует, то мы не сможем добиться желаемого. Какие бы столбцы и строки мы ни удаляли, в результате у нас останется некоторая подматрица исходной матрицы с хотя бы одной строкой и хотя бы $m - n + 1$ столбцами. Раз мы предположили, что возрастающей последовательности длины $m - n + 1$ нет ни в какой строке матрицы, то строки полученной подматрицы не отсортированы, а значит, добиться ответа «Yes» нельзя вне зависимости от наших действий.

Остаётся найти НВП в каждой строке матрицы и проверить, что хотя бы в какой-то строке она имеет длину хотя бы $m - n + 1$. Поиск НВП — стандартная задача, решить её можно при помощи дерева отрезков, дерева Фенвика или динамического программирования за $\mathcal{O}(m \log m)$ для каждой строки.

Итого решение можно реализовать за $\mathcal{O}(nm \log \max(n, m))$